ENSA d'Al-Hoceima | Année 2019/2020
AP-I, Première Année, | Semestre 2
Algèbre Linéaire, | TD1

Série N^{o}1 : Espaces vectoriels, sous-espace vectoriel et base

Exercice 1

1. Soit F un sous $\mathbb{K}$-e.v. d'un espace vectoriel E. Existe-t-il un sous-espace vectriel G de E tel que
$$F \cap G = \emptyset.$$
2. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. Montrer que l'addition des applications linéaires et la multiplication par un scalaire munissent $\mathcal{L}(E,F)$ d'une structure d'espace vectoriel.
3. Quelles sont les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans lui-même ? La loi
$$(f,g) \longmapsto f \circ g$$
définie dans $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est-elle commutative ?

Exercice 2

1. (a) Soit α, β et λ des nombres réels. Montrer que le système :
$$\{(1,\alpha,\beta),\ (0,1,\lambda),\ (0,0,1)\}$$
est une base de $\mathbb{R}^3$
   (b) Est-ce que le système :
$$\{(1,2,3),\ (2,3,4),\ (3,4,5)\}$$
est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Soit u, v et w trois vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel E.
   (a) Montrer que le système $(v+w, w+u, u+v)$ est libre. Le système $(v+w, w+u, u+v)$ est-t-il une base ?
   (b) On suppose que E est de dimension 3.
   Si (α,β,λ) est le système des coordonnées d'un vecteur x de E dans la base (u,v,w), quel est le système de coordonnées de x dans la base $(v+w, w+u, u+v)$?

Exercice 3

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions numériques, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
2. Soit $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'application qui à une fonction $f \in \mathcal{D}$ associe la fonction dérivée f'. Montrer que φ est linéaire.
3. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4

1. Soit E un espace vectoriel non nul. On note $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble des homothéties vectorielles de E sur lui-même. Montrer que $\mathcal{H}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.
2. Soit $h \in \mathcal{H}(E)$. Montrer que :
$$(\forall f \in \mathrm{GL}(E)), \quad f^{-1} \circ h \circ f \in \mathcal{H}(E)$$

3. Montrer que si $E = \mathbb{R}$ est la droite vectorielle, alors $\mathcal{H}(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}(\mathbb{R})$.

Exercice 5

1. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et (i, j) une base de E. Soit f et g deux endomorphisme de E définis respectivement par :
$$\begin{cases} f(i) &= i + 2j, \\ f(j) &= 4i + 5j, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(i) &= 5i + 6j \\ g(j) &= 7i + 8j. \end{cases}$$
Soit $v = x.i + y.j$ (où $(i, j) \in \mathbb{R}^2$) un vecteur de E.
Quelles sont les composantes sur la base (i, j) des vecteurs suivants :
$$f(v); \quad g(v); \quad (5.f(v) - 4.g(v)); \quad (2.f - id_E)(v); \quad (-f + \pi.g)(v).$$
2. Soit S et T les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ engendrés respactivement par les vecteurs :
$$S = \overline{< (1, -1, 2); (1, 1, 2); (3, 6, -6) >},$$
$$T = \overline{< (0, -2, -3); (1, 0, 1) >}$$
Quelles sont les dimensions de S, T et $S \cap T$?

Exercice 6

1. Soit (e_1, e_2, e_3) la base naturelle de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :
$$f(e_1) = e_1 - e_2; \quad f(e_2) = -e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_2 + e_3.$$
Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et (i, j, k) une base de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que :
$$f(i) = \frac{1}{3}\left[2i + 2j - k\right]; \quad f(j) = \frac{1}{3}\left[2i - j + 2k\right]; \quad f(k) = \frac{1}{3}\left[-i + 2j + 2k\right].$$
   (a) Montrer que $f^2 = id_E$. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Déterminer une autre base (e_1, e_2, e_3) de E telle que l'on ait :
$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = e_2, \quad f(e_3) = -e_3.$$

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et (i, j, k) une base de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que :
$$f(i) = \frac{1}{4}i + \frac{1}{8}j + \frac{\sqrt{11}}{8}k; \quad f(j) = \frac{1}{8}i + \frac{1}{16}j + \frac{\sqrt{11}}{16}k; \quad f(k) = \frac{\sqrt{11}}{8}i + \frac{\sqrt{11}}{16}j + \frac{11}{16}k.$$

1. Calculer $f \circ f$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est le plan d'équation : $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{11}}{4}z = 0$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est la droite D de vecteur directeur : $\frac{1}{2}i + \frac{1}{4}j + \frac{\sqrt{11}}{4}k$.

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et (i, j, k) une base de E. On désigne par f l'endomorphisme de E tel que :
$$f(i) = \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j; \quad f(j) = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j \quad \text{et} \quad f(k) = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + k.$$

1. Montrer que $f \circ f = f$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.